

الثلاثاء ١٨ / ٥ / ١٩٩٩ عهدي ١٢١ الحاضرة الثالثة عشر - ١٣٢  
حاضرة تمارين شامله عن المادة - والأخيرة -

\* أربع فصول في أسئلة التكامل مع إتمام بعض  
١. النشر - ٢. أنواع نظام الإدارة  
٣. نظرية الرواسه.

تجربياً: الصيغة متكاملة  $\int_C P(z) dz$  إذا كانت  $P(z) = \frac{z+2}{z}$

د C هي: أ: نصف الدائرة العلوي والذي يمتد من  $z = 2$  إلى  $z = -2$

ع" ~ ~ ~ الفلّ ~ ~ ~  $z = 2$  ~ ~ ~  $z = -2$

٣: الدائرة  $|z| = 2$

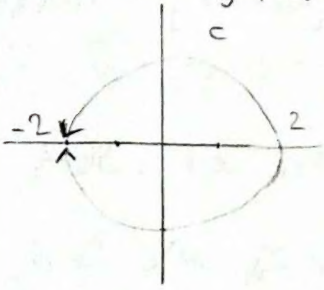
الحل: لنفرض، لقاعدة

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

1- أوجد معادلات  $z(t)$

1-! صيغة البارة هي  $z = 2e^{i\theta}$   $0 \leq \theta \leq 2\pi$

مع دالتاي جانه معادله نصف العلوي لير  $0 \leq \theta \leq \pi$ ;  $Z = 2e^{i\theta}$



$$\Rightarrow f(z(t)) = \frac{2e^{i\theta} + 2}{2e^{i\theta}} = (e^{i\theta} + 1)e^{-i\theta} = 1 + e^{-i\theta} ; 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\Rightarrow z'(t) = 2i e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} (1 + e^{i\theta}) z i e^{i\theta} d\theta = 2i \int_0^{2\pi} e^{i\theta} + 1 d\theta$$

$$\Rightarrow = 2i \left[ \frac{1}{i} e^{i\theta} + \theta \right]_0^\pi = 2i \left[ -\frac{1}{i} + \pi - \frac{1}{i} \right] = -4 + 2\pi i$$

c- ان معادلة لابلاز هي  $z = 2e^{i\theta}$  ;  $0 \leq \theta < 2\pi$  في الدائرة كما

وبالتالي فإن  $z = 2e^{-i\theta}$  ،  $0 \leq \theta < 2\pi$  (وهي بند كد  $\theta$  و  $2\pi$  في اتجاه المعاكس)

معادله حذف افق من الدائرة التي عند  $z=2$  الى  $z=-2$  هو

$$Z' = -i Z e^{-i\theta} \quad \Leftarrow \quad -\pi \leq \theta \leq 0 \quad \therefore \quad Z = Z' e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow f(z(\theta)) = \frac{2e^{-i\theta} + 2}{2e^{i\theta}} = (e^{-i\theta} + 1) e^{i\theta} = 1 + e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = \int_{-\pi}^0 (1 + e^{i\theta})(-i2e^{i\theta}) d\theta = -i2 \int_{-\pi}^0 (e^{i\theta} + 1) d\theta$$

$$= -2i \left[ -\frac{1}{i} (1) + 0 \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$



$$= -2i \left[ -\frac{1}{i} \bar{e}^0 + 0 - \left( -\frac{1}{i} e^{i\pi} \right) + (-\pi) \right]$$

$$= 2 + 2i \left[ -\frac{1}{i} e^{i\pi} + \pi \right] = 2 + 2i \left[ \frac{1}{i} - \pi \right] = \boxed{4 - 2i\pi}$$

! نه صادلة الدائرة  $z = 2e^{i\theta}$  ،  $0 < \theta \leq 2\pi$  ، « دائما بذكر الاتجاه »  
 « نأخذ الاتجاه الموجب »

$$\Rightarrow z' = 2i e^{i\theta} \Rightarrow f(z(\theta)) = \frac{2e^{i\theta} + 2}{2e^{i\theta}} = (e^{i\theta} + 1) e^{-i\theta} = 1 + e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} (1 + e^{-i\theta}) 2i e^{i\theta} d\theta = 2i \int_0^{2\pi} e^{i\theta} + 1 d\theta$$

$$= 2i \left[ \frac{1}{i} e^{i\theta} + \theta \right]_0^{2\pi} = 2i \left[ \frac{1}{i} + 2\pi - \left( \frac{1}{i} + 0 \right) \right] = \boxed{4\pi i}$$

ملحوظة:  
 • النشر على منطقة  
 • والتكامل على محيطها

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

تحريين: احسب قيمة التكامل  
 حيث  $C$  هو الكفاف المعطى بالمعادلة

الحل:  
 الكفاف المعطى يكتب بالشكل

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \quad , \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

وهي معادلة دائرة مركزها  $(1,1)$  نصف قطرها  $R = \sqrt{2}$

$$(z-1)^2(z^2+1) = 0 \quad \text{! نه لنقاط الشاذة هو صيغ معادلة المعادلة}$$

$$\text{أي: } z=1 \in z^2+1=0 \text{ او } z^2+1=0 \in z=-i \text{ و } z=i$$

مركز الدائرة  $z_0 = 1+i$

$$|z_1 - z_0| = |1 - 1 - i| = |-i| = 1 < \sqrt{2}$$

$$|z_2 - z_0| = |1 - 1 - i - i| = |-2i| = 2 > \sqrt{2}$$

$$|z_3 - z_0| = |1 - 1 - i| = |-i| = 1 < \sqrt{2}$$

في التالي نستنتج بأنه  $z_1 = 1$  تقع في داخلية الدائرة ،  $z_2 = -i$  تقع في خارجية الدائرة ،  
 $z_3 = i$  تقع في داخلية الدائرة .

ملاحظة: لنقاط  $z_1, z_2, z_3$   
 • داخل أو خارج  
 • أو على المحيط وقد تقع ولا يمكن  
 • عند نقاط التكامل ...



P(z) - 2-1

ملحوظة: عندما يكون لدينا نقطة داخلية، يكون التكامل على دائرة صغيرة محيطة بالنقطة.

خط  $z=1$  ببارته  $C_1$  نصف قطرها صغير، كان  $C_2 \sim z_2=i \sim C_1 \cap C_2 = \emptyset$  لكي يكون  $\sim \sim \sim \sim \sim$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} &= \int_{C_1} \frac{1}{(z-1)^2} dz + \int_{C_2} \frac{1}{(z-1)^2(z+i)} dz \\ &= \frac{2\pi i}{1!} \left[ \frac{1}{z^2+1} \right]_{z=1} + 2\pi i \left[ \frac{1}{(z-1)^2(z+i)} \right]_{z=i} \\ &= 2\pi i \left[ -\frac{2z}{(z^2+1)^2} \right]_{z=1} + 2\pi i \left[ \frac{1}{(-1-i)^2(2i)} \right] \\ &= 2\pi i \left[ -\frac{2}{4} \right] + 2\pi i \left[ \frac{1}{4} \right] = -\pi i + \frac{\pi i}{2} = -\frac{\pi i}{2} \end{aligned}$$

نخرج عن الحلقة المقصورة.

لتكن لدينا الدالة  $f(z) = 3z^2 - 1$

عند النقاط  $z$  من القرص الداخلي  $|z| < 1$  التي تبلغ على الدالة القيمة المقصودة.

الدالة المعطاة كثيرة حدود من الدرجة الثانية وهي دالة متصلة أي تحليلية على جميع نقاط المستوى العقدي ومن ثم، أولى فهي تحليلية على نطاق القرص الداخلي  $|z| < 1$  وعلاوة على ذلك، على نطاق الاستتقاق  $|z| < 1$  وهي مستمرة على المحيط وعلى الداخل  $\sim$  واستناداً إلى مبرهنه القيمة القصوى، فإن الدالة تبلغ قيمها القصوى على المحيط.

$$|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$$

لكن  $|z|=1 \Rightarrow z=e^{i\theta} \quad 0 < \theta \leq 2\pi$

$$f(z) = 3e^{2i\theta} - 1 \rightarrow \overline{f(z)} = 3e^{-2i\theta} - 1$$

$$\Rightarrow |f(z)|^2 = (3e^{2i\theta} - 1)(3e^{-2i\theta} - 1) = 9 - 3e^{2i\theta} - 3e^{-2i\theta} + 1$$

3) لينة الاستقامة ناموا (9)



$$= 10 - 3(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) = 10 - 6\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right)$$

$$= 10 - 6\cos 2\theta$$

لكن ما بين:

$$-1 \leq \cos(2\theta) \leq 1$$

$$\times -6$$

$$-6 \leq -6\cos(2\theta) \leq 6$$

$$+ 10$$

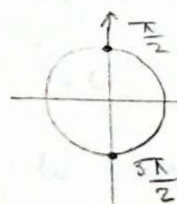
$$4 \leq 10 - 6\cos(2\theta) \leq 16$$

$$\Rightarrow 10 - 6\cos 2\theta = 16 \Rightarrow -6\cos(2\theta) = 6 \Rightarrow \cos(2\theta) = -1$$

$$\Rightarrow 2\theta = \pi + 2n\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$n=0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi] \rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \rightarrow \text{عبارة}$$

$$n=1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi] \rightarrow z = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \rightarrow \text{عبارة}$$



أي أن الدالة تبلغ قيمتها العظمى عند  $z = i$  ،  $z = -i$

### والآن نمارين النشر

\* ملحظة: الفرق بين نشر مأكورات و لورانة

وذلك من طرف النقاط عينا

$$|z - z_0| < r$$

$$|z| < r \text{ مأكورات}$$

$$|z| < r \text{ نشر لورانة}$$

• مع العلم أن نشر تاليو، مأكورات لا يأتي « الذي يأتي هو نشر لورانة »

\* سؤال النشر: بعد الدكتور نقاش معين ولا نقول المستوى العقدي المحدد أم لا

بينما ~ نقسيف لقطاع الشاذة يقول الدكتور المستوى العقدي المحدد، لتبين نوع  $z$

\* اكسب، هذا أمك - - - ♡ ♡ ♡



تمرين: لكن لدينا الدالة:  $P(z) = \frac{z-1}{z^2(z-2)}$  ;  $2 < |z|$  أو هي مشورة هذه الدالة.

الحل:

$$P(z) = \frac{z-1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-2} = \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right) \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}$$

$$= \left[ \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} \right] \cdot \left[ \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \right]$$

$$= \left( \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} \right) \left( 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \frac{z^4}{16} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{z}{z^3} + \frac{z^2}{z^4} + \dots - \frac{1}{z^3} - \frac{z}{z^4} - \frac{z^2}{z^5} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{z}{z^4} + \dots$$

تمرين: اوجد مشورة الدالة عند القطب  $0 < |z| < 2$  ;  $P(z) = \frac{z-1}{z^2(z-2)}$

الحل:

$$P(z) = \frac{z-1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-2} = \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right] \cdot \frac{1}{-2(1 - \frac{z}{2})}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right] \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right] \cdot \left[ 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \dots \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} - \left( \frac{1}{4} \right) \frac{1}{z} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}z$$

نضع من بشر السبقية  $z=0$  قلبه لانحد دالات القوت بالبحر  
 درتبة القطب  $= 2$  " لانه على اسس بالقوت بالبحر "

$$\text{Res } P(z)_{z=0} = -\frac{1}{4} = b_1$$



والآن نأخذ دالة، لنفرض، الدالة

$$f(z) = \frac{1}{z-i} e^{\frac{1}{z-i}} \quad ; \quad 0 < |z-i|$$

$$= \frac{1}{z-i} \left[ 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(z-i)^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{(z-i)^3} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{z-i} + \frac{1}{1!} \frac{1}{(z-i)^2} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{Res} \frac{1}{z-i} e^{\frac{1}{z-i}} = 1 ; \quad \text{Res} \frac{1}{z-i} e^{\frac{1}{z-i}} = -1$$

وبكيفية مماثلة تأخذ نصف الدالة

$$\text{Res}_{z=\infty} f(z) = -b_1$$

نريد، عين وصف، الدالة،

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1} \cot z$$

الحل:

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1} \frac{\cos z}{\sin z}$$

الدالة، الدالة هي دالة، الدالة

$$(e^z - 1)(\sin z) = 0 \Rightarrow \sin z = 0 \Rightarrow z = n\pi, n=0, \pm 1, \dots$$

$$e^z - 1 = 0 \Rightarrow e^z = 1 \Rightarrow z = 2n\pi i, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ومن أجل  $n=0$   $\leftarrow z=0$  هي نقطة الدالة، الدالة، الدالة

وهذا يعني أنه  $z=0$  هي نقطة الدالة، الدالة، الدالة

وبالنسبة للنقاط هي  $z = n\pi, n = \pm 1, \pm 2, \dots$  أو  $0$  على ما يلي

$$z = 2n\pi i, n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

هي نقطة الدالة، الدالة، الدالة، الدالة، الدالة

$$f(z) = \frac{(z-\pi)^2}{e^z - 1} \cot(z) = \frac{(z-\pi)^2}{e^z - 1} \frac{\cos z}{\sin z}$$

الحل:  $z=0$  للدالة، الدالة، الدالة، الدالة، الدالة

ومن أجل  $n=1$   $\leftarrow z=\pi$  للدالة، الدالة، الدالة، الدالة، الدالة



كما أنه  $z = \pi$  هي نقطة لثابت عند  $z = \pi$  هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح  
وبما أن النقاط  
 $z = n\pi \quad \in \quad n = -1, \pm 2, \dots$   
 $z = 2n\pi i \quad \in \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$   
 هي نقاط بسيطة.

والآن نأخذ من مبرهنة لرواسيه: ختاماً.

نقري: اعتماداً على مبرهنة لرواسيه أصبحت السكالبين الآتيين:

$$I_2 = \int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)} dz, \quad I_1 = \int_{|z|=3} \frac{z-2}{(z-1)^2(z-4)} dz$$

الحل: الكفاف المطر هو دائرة التي مركزها (0,0) ونصف قطرها  $R=3$   
 النقاط الشاذة هي  $z=1$ ,  $z=-2$ , والنقطتان تقعان في داخلية الكفاف  
 لذلك اعتماداً على مبرهنة لرواسيه يكون:

$$I = 2\pi i (b_1 + b_2)$$

$$\Rightarrow b_1 = \text{Res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}$$

$$b_2 = \text{Res}_{z=-2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)} \Rightarrow b_2 = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^{-2}}{9}$$

دكون  $z=1$  قطب شاذي من الدرجة

$$b_1 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (z-1)^2 \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}$$

$$\Rightarrow b_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(z+2) - e^z}{(z+2)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z+1)e^z}{(z+2)^2} = \frac{2e}{9}$$

$$\Rightarrow I_1 = 2\pi i \left( \frac{e^{-2}}{9} + \frac{2e}{9} \right)$$



یہاں اسکا عمل لکھیے :

الحل:

 $|z| = 3$ 

الكفاف، لصفه دائرة مركزها (5, 5) ونصف قطرها  $R=3$

السؤال الثاني

2- نقد داخل و هو قسط من الرتبة السابعة

2 = 4 نفقہ، مہ، الکفانہ، لہر قہ سہ

$$\underline{I}_2 = 2\pi i (b_1)$$

فلم يزل

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=4} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=1} = -\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=4} - \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=\infty}$$

لأن  $z = \infty$  نقطة مفردة، السالبة للالة  $f(z)$   
 $\Rightarrow \text{Res } f(z) = 0$   
 $z = \infty$

$$\text{Res } f(z) \underset{z=4}{=} \lim_{z \rightarrow 4} \frac{(z-4)(z-2)}{(z-1)^7(z-4)}$$

$$: \sim 1.60$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-2}{(z-1)^7} = \frac{2}{3^7}$$

انقلت الحاضرة ٣ ١٣، والاعشرة

رہائے آفتاب طارہ بیوم 23 / 6 / 2018 تا 11 اکتوبر